

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

Ediția a XXVII-a

ETAPA LOCALĂ – 30 ianuarie 2026

Clasa a X-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1. (20 puncte)

Dacă notăm $A_m = (\sqrt{2} + 1)^m + (\sqrt{2} - 1)^m$, să se arate că

- a) $A_4 = A_3 \cdot A_1 - A_2$;
b) $A_{m+n} = A_m \cdot A_n - A_{m-n}$, unde $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

SOLUȚIE:

a)	$A_1 = (\sqrt{2} + 1)^1 + (\sqrt{2} - 1)^1 = 2\sqrt{2}$	2p
	$A_2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = 6$	3p
	$A_3 = (\sqrt{2} + 1)^3 + (\sqrt{2} - 1)^3 = (5\sqrt{2} + 7) + (5\sqrt{2} - 7) = 10\sqrt{2}$	2p
	$A_4 = (\sqrt{2} + 1)^4 + (\sqrt{2} - 1)^4 = (17 + 12\sqrt{2}) + (17 - 12\sqrt{2}) = 34$	2p
	Finalizare	1p
b)	Dacă $a = \sqrt{2} + 1$ și $b = \sqrt{2} - 1$, atunci $a \cdot b = 1$	2p
	$A_m \cdot A_n = (a^m + b^m) \cdot (a^n + b^n) = a^{m+n} + a^m b^n + a^n b^m + b^{m+n} = A_{m+n} + a^m b^n + a^n b^m =$	3p
	$= A_{m+n} + a^n b^n (a^{m-n} + b^{m-n}) =$	3p
	$= A_{m+n} + 1 \cdot (a^{m-n} + b^{m-n}) = A_{m+n} + A_{m-n}$, de unde cerința problemei	2p
Notă. Dacă (și numai dacă) un concurent rezolvă corect cerința b), apoi deduce a) considerând $a = 3$, $b = 1$, va primi și punctajul aferent punctului a).		

Subiectul 2. (20 puncte)

- a) Dacă $x, y, z \in (1, +\infty)$, arătați că expresia $E = x^{\lg \frac{y}{z}} \cdot y^{\lg \frac{z}{x}} \cdot z^{\lg \frac{x}{y}}$ are valoare constantă.
- b) Dacă $\lg 2 = p$ și $\lg 3 = q$ exprimați $\log_{30} 24$ în funcție de p și q .

SOLUȚIE:

a)	<p>Logaritmăm expresia dată:</p> $\lg E = \lg \left(x^{\lg \frac{y}{z}} \cdot y^{\lg \frac{z}{x}} \cdot z^{\lg \frac{x}{y}} \right) = \dots\dots\dots$ $= \lg x^{\lg \frac{y}{z}} + \lg y^{\lg \frac{z}{x}} + \lg z^{\lg \frac{x}{y}} = \dots\dots\dots$ $= (\lg y - \lg z) \cdot \lg x + (\lg z - \lg x) \cdot \lg y + (\lg x - \lg y) \cdot \lg z = 0 \dots\dots\dots$ <p>Rezultă că $E = 1$, așadar valoarea expresiei este constantă $\dots\dots\dots$</p>	<p>3p</p> <p>3p</p> <p>3p</p> <p>1p</p>
b)	$\log_{30} 24 = \frac{\lg 24}{\lg 30} = \frac{\lg(2^3 \cdot 3)}{\lg(2 \cdot 3 \cdot 5)} = \frac{3 \lg 2 + \lg 3}{\lg 2 + \lg 3 + \lg 5} \dots\dots\dots$ $1 = \lg 10 = \lg 2 + \lg 5 \Rightarrow \lg 5 = 1 - \lg 2 = 1 - p \dots\dots\dots$ $\log_{30} 24 = \frac{3p + q}{p + q + 1 - p} = \frac{3p + q}{q + 1} \dots\dots\dots$	<p>4p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>

Subiectul 3. (20 puncte)

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

- Demonstrați că: $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.
- Arătați că unul dintre numerele z_1, z_2, z_3 este egal cu 1.
- Determinați valoarea expresiei: $\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3} + \frac{1}{z_3^3}$.

SOLUȚIE:

a)	<p>Avem: $z_1 = 1 \Rightarrow z_1 ^2 = 1 \Rightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = 1 \Rightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$ și analoagele</p> <p>$z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Rightarrow \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1 \Rightarrow \dots$</p> <p>$\Rightarrow 1 = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} \Rightarrow z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>3p</p>
b)	<p>$z_1 + z_2 + z_3 = 1 \Rightarrow z_2 + z_3 = 1 - z_1$. Înlocuind în $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$, obținem:</p> <p>$z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3 + z_1 (z_2 + z_3) = 0 \Leftrightarrow z_2 z_3 (1 - z_1) + z_1 (1 - z_1) = 0 \Leftrightarrow (z_2 z_3 + z_1)(1 - z_1) = 0 \dots$</p> <p>$z_1 + z_2 z_3 = 1 - z_2 - z_3 + z_2 z_3 = (1 - z_2) - z_3 (1 - z_2) = (1 - z_2)(1 - z_3)$, așadar</p> <p>$(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$, de unde $z_1 = 1$ sau $z_2 = 1$ sau $z_3 = 1 \dots$</p>	<p>4p</p> <p>4p</p>
c)	<p>Dacă $z_1 = 1$, din $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ obținem $z_3 = -z_2$, deci $\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3} + \frac{1}{z_3^3} = 1 + \frac{1}{z_2^3} - \frac{1}{z_2^3} = 1$.</p> <p>Acceași valoare a expresiei se obține și în cazurile $z_2 = 1$ și $z_3 = 1 \dots$</p>	4p

Subiectul 4. (30 puncte)

În sezonul rece al anului școlar trecut, epidemia de gripă s-a răspândit într-un liceu conform legii $p(t) = 0,55 - 16^{-0,25 \cdot t}$, unde $p(t)$ reprezintă procentul de elevi (din numărul total al acestora) care a venit în contact cu boala, iar t este numărul de săptămâni trecute de la semnalarea primului caz de gripă în comunitatea liceului.

- În liceu învață 500 de elevi. Câți elevi au intrat în contact cu boala după o săptămână de la semnalarea primului caz de gripă?
- În a câta săptămână de la debutul epidemiei au intrat în contact cu boala mai mult de jumătate din elevii liceului?

SOLUȚIE:

a)	$p(1) = 0,55 - 16^{-0,25} = \dots\dots\dots$ $= 0,55 - (2^4)^{-0,25} = 0,55 - 2^{-1} = 0,55 - 0,5 = 0,05 \dots\dots\dots$ $0,05 = 5\%$, așadar după o săptămână au contactat boala $5\% \cdot 500 = 25$ de elevi $\dots\dots\dots$	5p 5p 5p
b)	Căutăm valoarea minimă a numărului natural n cu proprietatea că $p(n) > 0,5 \dots\dots\dots$ Atunci: $0,55 - 16^{-0,25 \cdot n} > 0,5 \Rightarrow 16^{-0,25 \cdot n} < 0,05 \Rightarrow 2^{-n} < 0,05 \dots\dots\dots$ $\Rightarrow 2^n > 20$, așadar evenimentul din enunț se petrece în a cincea săptămână $\dots\dots\dots$	5p 5p 5p

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii; se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice rezolvare corectă a oricărei probleme, dar diferită de cea din barem se notează cu punctaj echivalent.

Punctajul maxim este de 100 de puncte.